0.0.1 Avermelhamento Gravitacional

Utilizando a relação entre o tempo próprio (τ=tempo no sistema de repouso na coordenada r) e a coordenada temporal t,

$$d\tau = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

podemos calcular a diferença entre a frequência emitida em r_1

$$\nu_1 = \frac{1}{d\tau_1}$$

e a frequência recebida em um ponto qualquer r_2

$$\nu_2 = \frac{1}{d\tau_2}$$

que é dada por

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Podemos aproximar esta relação para um ponto $r_2 \gg r_1$ como

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e, se o campo gravitacional for fraco

$$v^2_{\text{escape}} \equiv \frac{2GM}{r_1} \ll c^2$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_1}\right)$$

de modo que

$$\nu_2 \simeq \nu_1 - \nu_1 \frac{GM}{c^2 r_1}$$

e

$$\boxed{\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{d\lambda}{\lambda} \simeq -\frac{GM}{c^2 r_1}}$$

1. Calcule o avermelhamento gravitacional (*gravitational redhift*) $\Delta\lambda$ na linha $H\alpha = \lambda 6563$ Å de

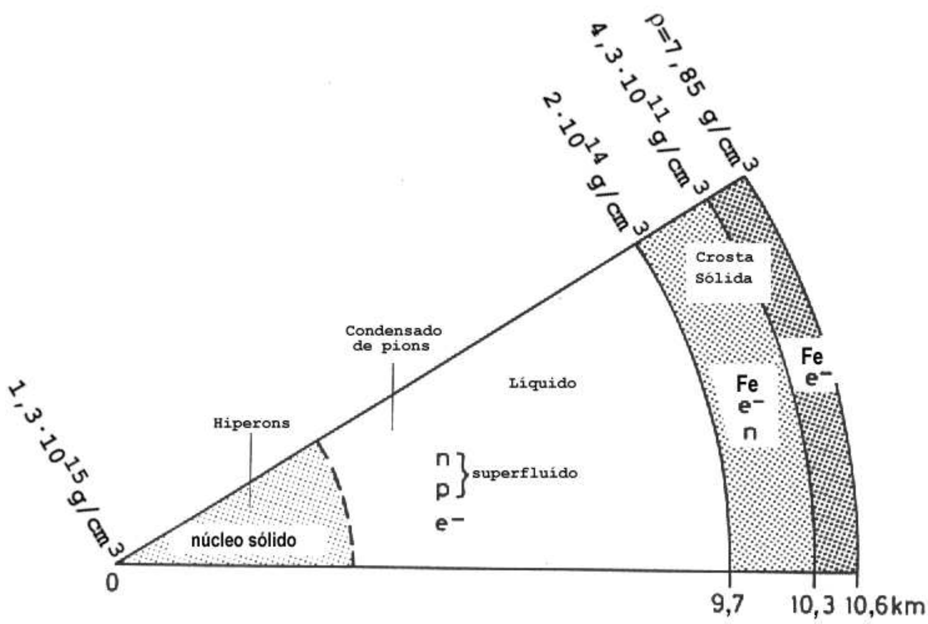

Figura 1: Estrutura de uma estrela de nêutrons calculada por David Pines (1980) utilizando uma equação de estado de rigidez média. A densidade na superfície, $\rho = 7,85$ g/cm^3 é a densidade do ferro sólido.

(a) Uma anã branca com $M = 1\ M_\odot$ e R=6000 km.

(b) Uma estrela de nêutrons com $M = 1,4\ M_\odot$ e R=10 km.

2. A equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para o equilíbrio hidrostático na relatividade geral é:

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho\left(1+\frac{P}{\rho c^2}\right)\left(1+\frac{4\pi r^3 P}{M_r c^2}\right)\left(1-\frac{2GM_r}{rc^2}\right)^{-1}}$$

Lembrando que

$$\left(\frac{dP}{dr}\right)_{\text{não relativístico}} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho$$

calcule

$$\frac{\left(\frac{dP}{dr}\right)_{\mathrm{TOV}}}{\left(\frac{dP}{dr}\right)_{\text{não relativístico}}}$$

para uma estrela de nêutrons com $\rho \simeq 2 \times 10^{14}$ g/cm^3, R=10 km e $M = 1,4\ M_{\odot}$, e a equação da pressão para o caso não relativístico mas degenerado (pág. 14)

$$P_{\mathrm{nr}} = \frac{h^2}{20m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} N^{\frac{5}{3}}$$

0.0.2 Tensores Covariantes e Contravariantes

Uma derivada contravariante é definida como

$$A^{\mathbf{i}} = \frac{\partial x_{\mathbf{i}}}{\partial x_k} A^k$$

enquanto que uma derivada covariante é definida como

$$A_{\mathbf{i}} = \frac{\partial x_k}{\partial x_{\mathbf{i}}} A_k$$

Portanto um tensor contravariante é dado por

$$T^{kl} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_l}{\partial x_j} T^{ij}$$

enquanto que um tensor covariante é dado por

$$T_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} T_{ij}$$

$$m_e = 9,1095 \times 10^{-28} \text{ g}$$

$$k = 1,381 \times 10^{-16} \text{ ergs/K}$$

$$h = 6,626 \times 10^{-27} \text{ ergs} \cdot \text{s}$$

$$G = 6,672 \times 10^{-8} \text{ dina} \cdot \text{cm}^2/\text{g}^2$$

$$m_{\mathrm{p}} = 1,67265 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$m_{\mathrm{n}} = 1,67492 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$m_{\mathrm{uma}} = 1,66057 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$