0.1 Equilíbrio Hidrostático na Relatividade Geral

Para campos gravitacionais fortes, como no caso de estrelas de nêutrons e buracos negros, precisamos utilizar a equação de campo de Einstein.

$$\boxed{R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{\kappa}{c^2} T_{ik}} \tag{1}$$

onde R_{ik} é o tensor espaço-tempo, g_{ik} são as componentes do tensor métrico e dependem do sistema de coordenadas usado e da unidade da coordenada temporal, T_{ik} é o tensor momentum-energia, que depende da distribuição e movimento das massas e do campo eletromagnético, e

$$\boxed{\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^2}}$$

é a *constante gravitacional de Einstein*. O tensor de segunda ordem R_{ik}, que descreve a forma do espaço-tempo, é chamado de tensor Ricci [Georgorio Ricci-Curbastro (1853-1925)], e contraído nos dá a curvatura escalar do espaço-tempo:

$$R = R_{km} g^{km}$$

também chamada de curvatura de Riemann [Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)]. Na equação (1), os dois índices i e k variam de 0 a 3, os dois termos à esquerda do sinal de igualdade representam a curvatura do espaço-tempo e o termo à direita as forças que atuam neste sistema. Os índices repetidos significam soma, pela convenção da soma de Einstein.

O tensor de segunda ordem de Ricci é função da geodésica:

$$\boxed{R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^k_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl} + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}} \tag{2}$$

através dos Γ^i_{kl}, os símbolos de Christoffel [Elwin Bruno Christoffel (1829-1900)]:

$$\boxed{\Gamma^i_{kl} \equiv \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} \right)} \tag{3}$$

O tensor de curvatura de Einstein é definido como:

$$G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \tag{4}$$

Com a métrica de Schwarzschild:

$$\boxed{ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta \, d\phi^2 \right)} \tag{5}$$

as únicas componentes covariantes não nulas do tensor métrico, com $x_0 = ct$ são:

$$g_{00} = e^{\nu} \quad g_{11} = -e^{\lambda} \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \mathrm{sen}^2\theta$$

e os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2} g_{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i} \tag{6}$$

$$\Gamma^i_{jj} = -\frac{1}{2} g_{ii} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x_i} \tag{7}$$

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2} g_{ii} \left[\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jj}}{\partial x_i} \right] \tag{8}$$

$$\Gamma^i_{ji} = \frac{1}{2} g_{ii} \left[\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_j} \right] \tag{9}$$

se reduzem a:

$$\Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu - \lambda}$$
$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}$$
$$\Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}$$
$$\Gamma^1_{33} = -r \mathrm{sen}^2\theta e^{-\lambda}$$
$$\Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2}$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^3_{23} = \cot\theta$$
$$\Gamma^2_{33} = -\mathrm{sen}\,\theta \cos\theta$$

o tensor de Ricci:

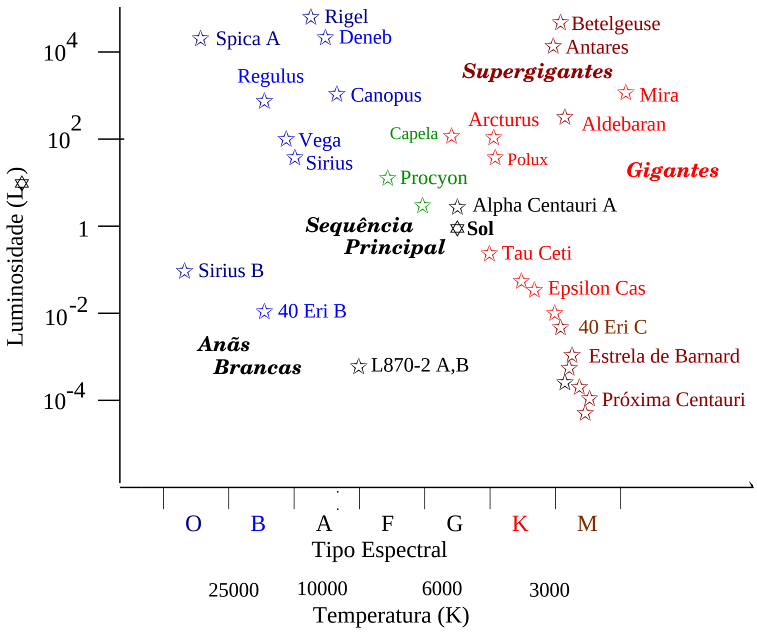
$$R_{00} = \left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right] e^{(\nu - \lambda)}$$
$$R_{11} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\lambda'}{r}$$
$$R_{22} = \left(1 + \frac{r\nu'}{2} - \frac{r\lambda'}{2} \right) e^{-\lambda} - 1$$
$$R_{33} = R_{22} \mathrm{sen}^2\theta$$

e finalmente a curvatura de Riemann:

$$\begin{aligned} R &= e^{-\nu} R_{00} - e^{-\lambda} R_{11} - \frac{2}{r^2} R_{22} \\ &= e^{-\lambda} \left[-\nu'' + \frac{1}{2}\lambda'\nu' - \frac{1}{2}(\nu')^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{2\lambda'}{r} - \frac{2\nu'}{r} \right] + \frac{2}{r^2} \end{aligned} \tag{10}$$

0.2 Exercícios de Formação Estelar

1. Calcule a posição no diagrama HR de uma nuvem de 10^{17} cm=0,05 pc e temperatura de 20 K.



2. Se a nuvem acima colapsa e inicialmente tem uma velocidade angular de rotação $\Omega \simeq 10^{-14}$ rad/s, tornando-se uma estrela como o Sol, com raio $R = 700\,000$ km, qual é a velocidade de rotação, se houver conservação do momento angular $R^2\Omega \simeq$ constante, e qual é o período de rotação? Compare com o período de rotação do Sol, de 28 dias.

3. O campo magnético das nuvens moleculares, da ordem do campo da galáxia, é da ordem de $\bar{B} \simeq 20$ μG. Se houver conservação de fluxo magnético, $R^2B \simeq$ constante, qual será o campo magnético? Compare com o campo magnético do Sol, de $\bar{B} \simeq 1$ G.